

Lei de Faraday

1. Eletrostática : Lei de Coulomb : $F = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$

$\Rightarrow$ Lei de Gauss : $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$

2. Carga em movimento : corrente elétrica estacionária gera campo magnético.

Força de Lorentz

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Lei de Biot-Savart

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i d\vec{\ell} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}$$

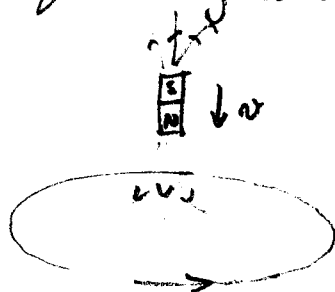
$\Leftrightarrow$

Lei de Ampère

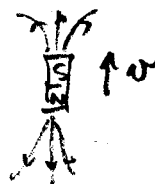
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i$$

Portanto,
(*) Campo magnético estacionário
NÃO gera corrente elétrica.

3. Campo magnético pode gerar corrente elétrica (*)



i - corrente induzida



Variação de campo sim.

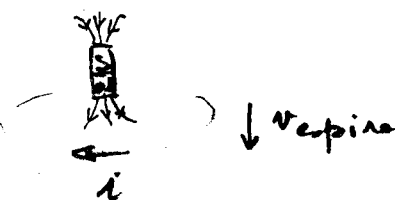
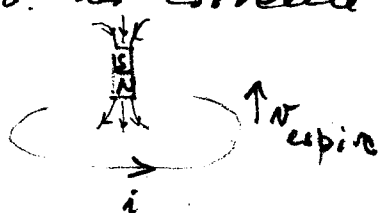


i - corrente induzida

1. Quanto maior a velocidade maior a corrente.

2. $v=0$ não há corrente.

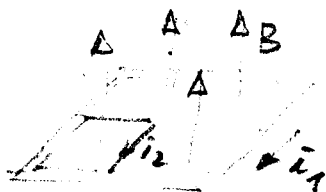
3. Se o ímã está parado e a espiral em movimento
t.b. há corrente induzida.



4. corrente induzida depende da área da espira:

(2)

Campo uniforme apuxa a mente, porém aumentados com o tempo.



$$i_2 = \frac{1}{4} i_1 \quad (\text{mesmo } \frac{dB}{dt})$$

Faraday concluiu que o que importa é a variação do fluxo de $\vec{B}$ através da área delimitada pela espira.

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

superfície aberta
delimitada pela espira.

A força eletromotriz $\mathcal{E}$ que causa uma corrente induzida

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

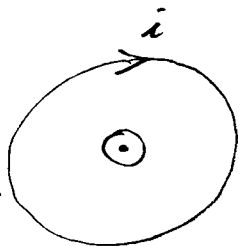
Em sinal do (-) é devido à Lei de Lenz.

$\mathcal{E} = (-)$ a variação do fluxo de $\vec{B}$ através da área delimitada pela espira.

Este fenômeno é conhecido como fenômeno de indução eletromagnética e tem aplicações tecnológicas muito grandes.

Lei de Lenz:

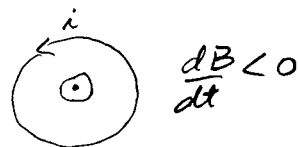
$$\frac{dB}{dt} > 0$$



Campo $\vec{B}$ aumenta $\Rightarrow$ fluxo de $\vec{B}$ através da superfície aumenta.

A corrente induzida é "do contra"; ele não gosta de variação (deje ele qual for) $\Rightarrow$ ele tem o sentido que provoca um campo de modo a diminuir esse aumento de fluxo. Ou seja, nesse caso ele aparece no sentido horário.

Se o campo B estiver diminuindo $\Rightarrow$ a corrente seria no sentido anti-horário (+ uma vez "do contra")



$$\frac{dB}{dt} < 0$$

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

/
superfície aberta
delimitada pela espira

Podemos imaginar que esse força eletromotriz decorre de um campo elétrico $\vec{E}$ (induzido) que cause o aparecimento de corrente induzida

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

ao longo do circuito fechado.

$$\mathcal{E} = - \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

ao longo do circuito

através da
área delimitada
pelo circuito

$$\boxed{\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{S}} \quad \underline{\underline{\text{Lei de Faraday}}}$$

Convenção para o vetor área. $d\vec{S}$



Regra da mão direita

sentido horário $d\vec{S}$ $\otimes$
sentido anti-horário $d\vec{S}$ $\odot$

Verificação:

(a) Se $\vec{B} \odot \Rightarrow \vec{B} \cdot d\vec{S} = -B dS \Rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{dB}{dt} dS$

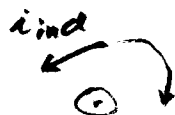
(a.1) se $\frac{dB}{dt} > 0$ (campo aumentando $\odot$) $\Rightarrow \mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} > 0$

$\Rightarrow$ corrente induzida está no sentido horário



(a.2) Se $\frac{dB}{dt} < 0$ (campo diminuindo $\odot$) $\Rightarrow \mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} < 0$

$\Rightarrow$ corrente induzida está no sentido anti-horário



(*) Note que o campo aponta na mesma direção nos casos (a.1) e (a.2).
A corrente induzida não se opõe ao campo; opõe-se à variação do fluxo.

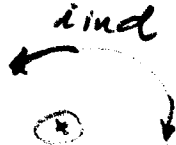
(5)

$$(b) \text{ Se } \vec{B} \otimes \Rightarrow \vec{B} \cdot d\vec{S} = B dS$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{dB}{dt} dS$$

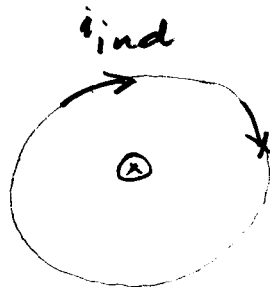
$$(b.1) \text{ Se } \frac{dB}{dt} > 0 \text{ (campo aumentando } \otimes) \Rightarrow \mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} < 0$$

corrente no sentido anti-horário



$$(b.2) \text{ Se } \frac{dB}{dt} < 0 \text{ (campo diminuindo } \otimes) \Rightarrow \mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} > 0$$

corrente no sentido horário

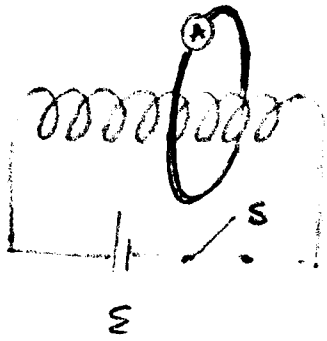


O.K. ✓

Na prática não precisamos nos preocupar muito
pois a "Lei de Lenz" de Lenz nos indica o
sentido da corrente induzida.

Do ponto de vista prático

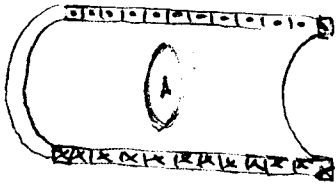
(a)



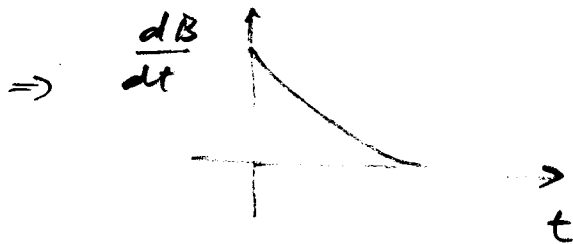
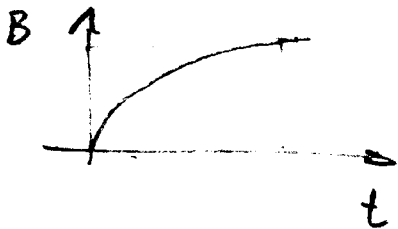
E
fonte de tensão variável

Podemos medir a corrente induzida na espira, variando a corrente (portanto o campo magnético gerado) no solenóide.

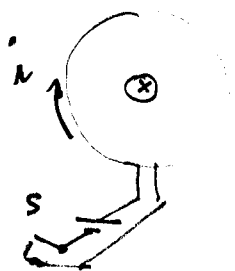
(b)



Medimos a corrente induzida para espiras internas com diferentes áreas. Campo magnético gerado pelo solenóide externo crescendo ou decrescendo com o tempo.



$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{dB}{dt} A$$



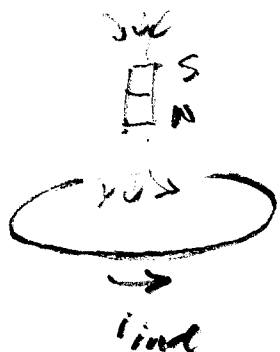
A chave S é fechada e a corrente i flui na espira gerando um campo magnético $\vec{B}$ no sentido $\otimes$. Quando

a chave S é desligada, o fluxo de campo magnético B (gerado pela própria corrente i) diminui $\Rightarrow \Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} > 0$ diminui, ou seja

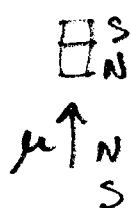
$$\frac{d\Phi}{dt} < 0 \Rightarrow \varepsilon_{ind} > 0 \Rightarrow \text{corrente induzida } (i_{ind})$$

terá o mesmo sentido de i (horário), reduzindo a variação de i .

Se $\frac{dB}{dt}$ for muito grande ε_{ind} tb será muito grande.



Imã caindo em direção à espira
 i_{ind} dá origem a um dipolo magnético $\vec{\mu} \uparrow$



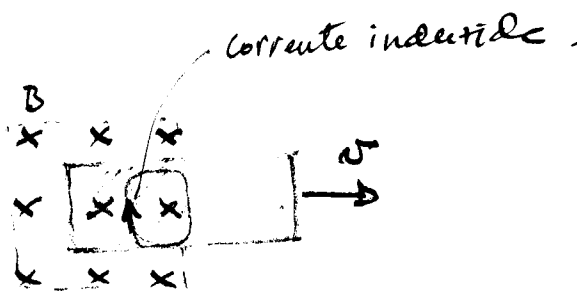
O campo magnético gerado pela corrente induzida

reduz a velocidade do queda.

Parte da energia cinética do imã é dissipada (na forma de calor) por efeito Joule na espira.

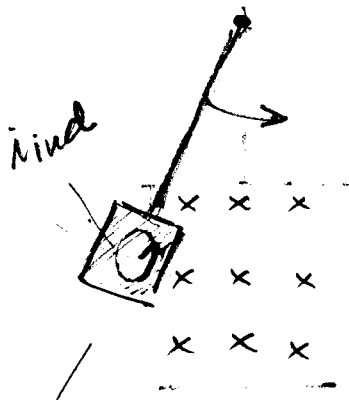
Correntes de Foucault:

Essas correntes dissipam calor por efeito Joule.



Pêndulo metálico suspenso

7

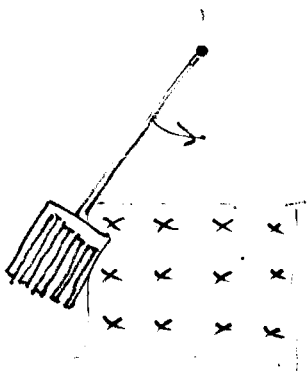


Parte de energia cinética do pêndulo é dissipada em calor por efeito Joule devido ao aparecimento das correntes de Foucault.

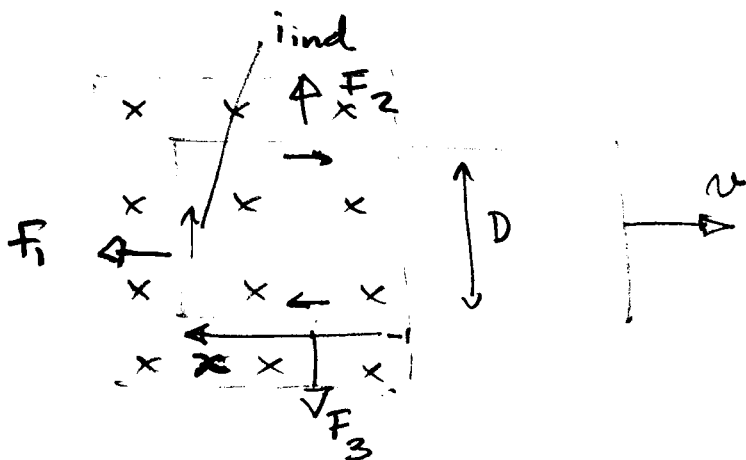
Elas equivalem a uma força de atrito viscoso, freando o pêndulo.

fluxo aumentado

O efeito é reduzido se fincas forem abertos no pêndulo



O fluxo nas partes metálicas é reduzido $\rightarrow$ corrente induzida diminui.



$$\Phi = B \cdot A = B D x$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = B D \frac{dx}{dt} = B D (-v)$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = B D v$$

$$i_{ind} = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_3 \quad F_2 = F_3 = i_{ind} \times B$$

$$F_1 = i_{in} D B$$

Força resultante $\vec{F}_1 = i_{ind} D B \hat{x}$

$$F_i = \frac{\mathcal{E}}{R} B D = \frac{B D v}{R} B D = \frac{B^2 D^2 v}{R}$$

Trabalho feito pelo agente externo

Força feita pelo agente externo $\rightarrow F_i$

$$dW = \vec{F}_{\text{ext}} \cdot d\vec{x} \Rightarrow \text{Potência dissipada} = \frac{dW}{dt}$$

$$P = F_i v = \frac{B^2 D^2 v^2}{R} \quad \checkmark$$

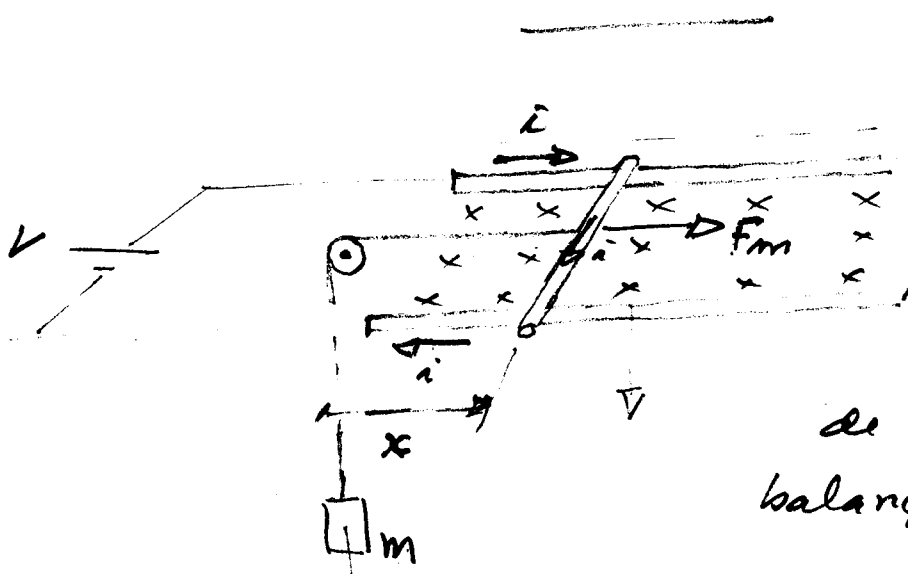
Potência dissipada por efeito Joule na

espira $P = R i^2 = R \cdot \frac{\mathcal{E}^2}{R^2} = \frac{\mathcal{E}^2}{R} = \frac{B^2 D^2 v^2}{R} \quad \checkmark$

Trabalho feito pelo agente externo =

Energia dissipada por efeito Joule. Isto é necessário para que

$\mathcal{E}$ (portanto a velocidade) seja mantida cte.



A haste
h anda com
velocidade
cte v na direcção
de F_m ; F_m é contra-
balanceado pelo peso mg .

Força electromotriz induzida $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} B h x = -B h v$
 i_{ind} tem sentido oposto a $i = \frac{V}{R}$ = corrente gerada pela
 bateria.

$$I = i - i_{\text{ind}} = \frac{V}{R} - \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{V - Bhv}{R}$$

$$F_m = I h B = mg \Rightarrow \left(\frac{V - Bhv}{R} \right) h B = mg$$

$$\Rightarrow V - Bhv = \frac{Rmg}{hB} \Rightarrow Bhv = V - \frac{Rmg}{hB} \Rightarrow$$

$$v = \frac{V}{Bh} - \frac{Rmg}{(Bh)^2} = \frac{R}{Bh} \left(\frac{V}{R} - \frac{mg}{Bh} \right) //$$

Então,

$$I = \frac{V}{R} - \frac{Bh}{R} \frac{R}{Bh} \left(\frac{V}{R} - \frac{mg}{Bh} \right) = \frac{mg}{Bh} //$$

A potência fornecida pela bateria é VI : parte é usada para suspender a massa m e parte é dissipada em calor.

$$\Delta E_p / \Delta t = mg \frac{\Delta h}{\Delta t} = mgv$$

Potência dissipada por efeito Joule $P = RI^2$

$$mgv + RI^2 = mg \frac{R}{Bh} \left(\frac{V}{R} - \frac{mg}{Bh} \right) + R \left(\frac{mg}{Bh} \right)^2$$

aumento de energia potencial gravitacional / tempo.

$$= \frac{mgR}{Bh} \frac{V}{R} = VI \checkmark$$

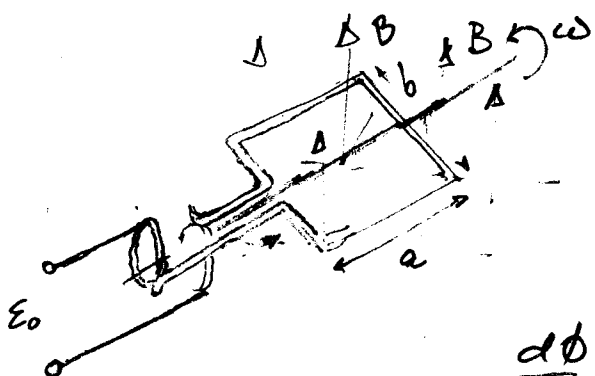
$$VI = mgv + RI^2 \checkmark \text{ como esperado}$$

Potência fornecida pela bateria

Potência dissipada por efeito Joule

Geração de corrente alternada

10



Bobina com N espiras girando com velocidade angular ω

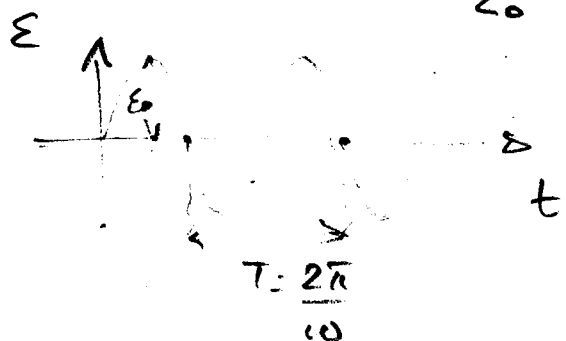
$$\Phi = B \cdot NA \cos \theta$$

$$\begin{cases} \theta = \omega t \\ A = ab \end{cases}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = -BNA \sin \omega t \omega$$

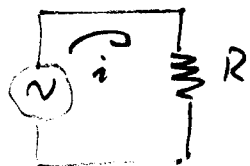
$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = \underbrace{BNA\omega}_{\varepsilon_0 - \text{amplitude}} \sin \omega t$$

f.e.m. alternada com amplitude ε_0
período $\frac{2\pi}{\omega}$



$$\text{frequência } \nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

Conectado a um resistor de resistência R



$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\varepsilon_0 \sin \omega t}{R}; \quad \varepsilon_0 = BNA\omega$$

O momento de dipolo magnético da bobina girante tem magnitude $\mu = NiA$

O torque ao qual ele está sujeito girando na presença do campo B é $|\vec{\tau}| = |\vec{\mu} \wedge \vec{B}| = NiAB \sin \theta$

$$\text{O trabalho realizado para girá-lo } dW = \tau d\theta \Rightarrow$$

Potência gasta para mantê-lo girando com velocidade angular ω é:

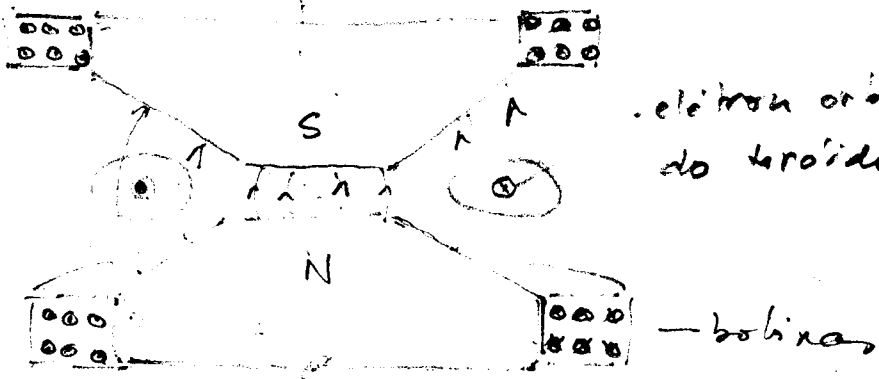
$$P = \frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} = \tau \omega = NiAB \sin \omega t \omega = \varepsilon i$$

que é a potência a ser dissipada no resistor.

Em uma hidroelétrica o trabalho para girar a turbina é feito mecanicamente pela queda d'água que mantém a turbina girando.

Os coletores são fios que têm resistência elétrica. Eles dissipam energia no processo de transmissão de p.e.m. e desde a hidroelétrica até nossas residências e locais de trabalho.

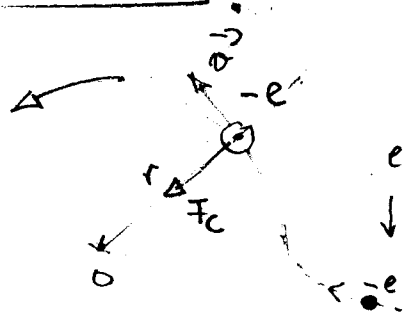
Bêta tron : acelerador de elétrons



elêtron orbita dentro do toróide em órbita circular

— bobinas

Unidade de cime



e é injetado na região onde existe campo magnético. O campo varia no tempo. Não é uniforme espacialmente porém, apresenta simetria axial.

(O campo é + interno na região central)

Sobre a órbita o campo é uniforme (simetria axial).

$$\vec{F}_e = e v B_0 = \frac{m v^2}{r} \Rightarrow r = \frac{m v}{e B_0} \quad \text{ou} \quad p = m v = e B_0 r$$

valor de B na órbita

carga eletrônica (-) de magnitude e

O campo B não é homogêneo espacialmente:
depende de r .

Valor médio de B sobre uma área S delimitada da
pelo raio de órbita r , pode ser definido por

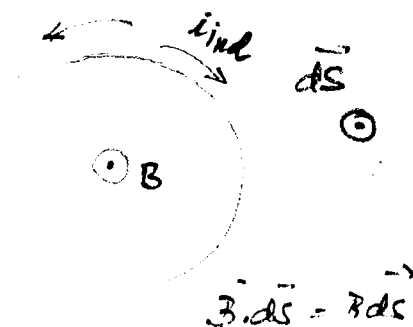
$$B_m = \frac{1}{\pi r^2} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad - \text{fluxo de } B(r) \text{ através da área } S.$$

$$\Rightarrow \Phi_S = B_m \pi r^2$$

Seu valor, B_m , varia no tempo

$$\frac{d\Phi_S}{dt} = \frac{dB_m}{dt} \pi r^2$$

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_S}{dt} = - \pi r^2 \frac{dB_m}{dt}$$



força eletromotriz ao longo da órbita de raio r .

Se $\frac{dB}{dt}$ for positivo a força eletromotriz (e portanto o campo elétrico) induzido estará no sentido horário

A força tangencial que atua no elétron

$\vec{F}_e = -e \vec{E}$ está na direção da velocidade eletrônica v aumenta em módulo $\Rightarrow v_e$ eletrônica aumenta.

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}}{2\pi r}$$

/ integralidade do
campo elétrico induzido

$$F_t = -eE = -e \frac{\mathcal{E}}{2\pi r} = -e \left(\frac{-\pi r^2}{2\pi r} \right) \frac{dB_m}{dt} = \frac{er}{2} \frac{dB_m}{dt}$$

/ força tangencial

$$F_t = \frac{dp}{dt} \Rightarrow \frac{dp}{dt} = \frac{er}{2} \frac{dB_m}{dt} \quad (1)$$

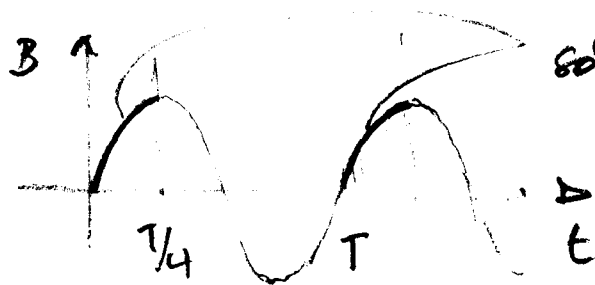
Por outro lado $p = mv = eB_0 r \Rightarrow \frac{dp}{dt} = e \frac{dB_0}{dt} r \quad (2)$

$$B(\rho, t) = B(\rho) \sin \omega t \quad \frac{\partial B}{\partial t} = B(\rho) \cos \omega t \omega$$

Comparando as expressões (1) e (2) vemos que é necessário que $B_0 = \frac{B_m}{2}$. O campo sobre a órbita deve ser metade do seu valor médio sobre a área delimitada pela órbita. As peças do betatron devem ser cuidadosamente projetadas para garantir isto.

Para que os elétrons sejam acelerados $\frac{dp}{dt} > 0$

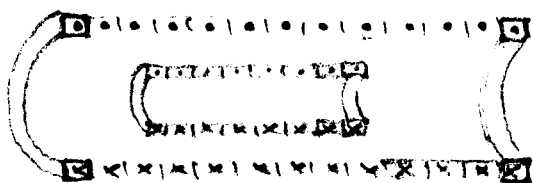
$$\Rightarrow \frac{dB_0}{dt} > 0$$



só nesse trecho é
que $\frac{dB}{dt} > 0$.

Só $\frac{1}{4}$ de cada ciclo é aproveitado para
 aceleração dos elétrons. Somente o primeiro
 quarto de ciclo é utilizado para a operação.
 Os elétrons são injetados em $t=0$ e extraídos
 em $t = \frac{T}{4}$.

Indutâncias mútua e auto-indutância.



- Solenóide interno de raio R_1 com N_1 espiras de comprimento l
- Solenóide externo de raio R_2 com N_2 espiras de comprimento l

Passando uma corrente i_1 estacionária no solenóide 1,
 é gerado um campo $B_1 = \mu_0 \frac{N_1}{l} i_1$ na região interna
 do solenóide 1, i.e., para $r < R_1$ e $B_1 = 0$ para $r > R_1$.

O fluxo produzido pelo solenóide 1 sobre as N_2
 espiras do solenóide 2 é dado por

$$\Phi_{2(1)} = N_2 \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{s} = N_2 \underbrace{B_1 (\pi R_1^2)}_{\substack{\text{só há campo para} \\ r < R_1}} = \mu_0 \frac{N_2}{l} N_1 i_1 (\pi R_1^2).$$

$$\boxed{\bar{\Phi}_{21} = L_{21} i_1} \quad \text{onde} \quad L_{21} = \frac{\mu_0 N_2 N_1 (\pi R_1^2)}{l} //$$

L_{21} é denominado indutância mútua.

$$\text{unidades: } \frac{\bar{\Phi}}{i} = \frac{Wb}{A} ; 1 \frac{Wb}{A} = 1 \text{ Henry. (H)}$$

Analogamente, se houver uma corrente i_2 passando pelo solenóide 2, haverá um campo

$$B_2 = \frac{\mu_0 N_2 i_2}{l} \quad r < R_2$$

$$0 \quad r > R_2$$

O fluxo do campo B_2 sobre as N_1 espiras do solenóide

1 é dado por:

$$\bar{\Phi}_{1(2)} = N_1 \int \vec{B}_2 \cdot d\vec{S} = N_1 B_2 (\pi R_1^2) = \frac{\mu_0 N_1 N_2 i_2 (\pi R_1^2)}{l}$$

$$\boxed{\bar{\Phi}_{1(2)} = L_{12} i_2} \quad \text{onde} \quad \boxed{L_{12} = L_{21} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 (\pi R_1^2)}{l}}$$

Além de produzirem fluxo magnético sobre o outro solenóide, há fluxo de campo sobre o próprio solenóide

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\Phi}_{1(1)} = N_1 \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = N_1 B_1 \pi R_1^2 = \frac{\mu_0 N_1^2 \pi R_1^2}{l} i_1 \\ \bar{\Phi}_{2(2)} = N_2 \int \vec{B}_2 \cdot d\vec{S} = N_2 B_2 \pi R_2^2 = \frac{\mu_0 N_2^2 \pi R_2^2}{l} i_2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\Phi}_1 = L_{11} i_1 = L_1 i_1 \quad \text{onde } L_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 (\pi R_1^2)}{l} \\ \bar{\Phi}_2 = L_{22} i_2 = L_2 i_2 \quad \text{onde } L_2 = \frac{\mu_0 N_2^2 (\pi R_2^2)}{l} \end{array} \right.$$

L_1 e L_2 são as auto-indutâncias dos solenóides 1 e 2 respectivamente.

(*) Note que $L_1, L_2, L_{21} = L_{12}$ só dependem de aspectos geométricos.

Se pelo solenóide 1 passa uma corrente i_1 e pelo solenóide 2 passa uma corrente i_2

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\Phi}_1 = L_1 i_1 + L_{12} i_2 \\ \bar{\Phi}_2 = L_{21} i_1 + L_2 i_2 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & L_{12} \\ L_{21} & L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

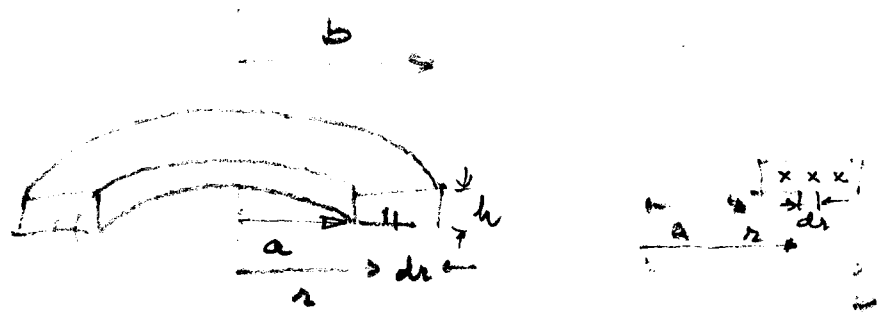
$$\frac{d\bar{\Phi}_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} \Rightarrow \mathcal{E}_1 = - \frac{d\bar{\Phi}_1}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - L_{12} \frac{di_2}{dt}$$

$$\frac{d\bar{\Phi}_2}{dt} = L_{21} \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \Rightarrow \mathcal{E}_2 = - \frac{d\bar{\Phi}_2}{dt} = -L_{21} \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt}$$

Obs: Há uma aproximação escondida aqui: isto só é aproximadamente correto se as variações de corrente são relativamente lentas, numa escala de tempo comparada com o tempo que a luz leva para atravessar as dimensões típicas do circuito. ($t = l/c$) $c \approx 3 \times 10^8 \text{ km/s} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$

A f.e.m. auto-induzida $\mathcal{E} = -L \frac{di}{dt}$ onde i é a corrente que atravessa o circuito.

Exemplos: 1. Auto-indutância de um fioide.



$$B = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r} \quad d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r} h dr N$$

$$d\Phi = \frac{\mu_0 N^2 i h}{2\pi} \frac{dr}{r} \Rightarrow \Phi = \int d\Phi = \int_a^b \frac{\mu_0 N^2 i h}{2\pi} \frac{dr}{r}$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 N^2 i h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \frac{di}{dt}$$

$$\Rightarrow L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Energia magnética

f.e.m. induzida $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$

Potência dissipada $P = \mathcal{E} i$

Potência fornecida para ter uma corrente i

$$P = -\mathcal{E} i = \frac{d\Phi}{dt} i = \frac{d}{dt}(Li) i = L \frac{di}{dt} i$$

A energia total fornecida para fazer passar essa corrente desde o instante original $t=0$ onde $i=0$ até o instante t onde a corrente é I é dado por

$$U = \int_0^t P dt = \int_0^t L i \frac{di}{dt} dt = \int_0^I L i di = \frac{LI^2}{2}$$

$$\boxed{U = \frac{1}{2} L i^2}$$

Vejam os o caso de um solenoide com N espiras $\Rightarrow n = \frac{N}{l}$

$$B = \mu_0 n i \Rightarrow L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S \quad \text{onde } S \text{ é área da}$$

$$\text{seção ret. do solenoide} \Rightarrow U = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2}{l} S i^2$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} \left(\mu_0 \frac{N}{l} i \right)^2 \frac{l S}{\mu_0} = \frac{1}{2 \mu_0} B^2 \underbrace{V}_{\text{volume do solenoide} = Sl}$$

$$\Rightarrow \text{Densidade volumétrica de energia} \quad u = \frac{U}{V} = \frac{1}{2 \mu_0} B^2$$

Este resultado é geral: onde existe um campo magnético $\vec{B}$ existe uma densidade de energia $\left[u_m = \frac{1}{2 \mu_0} B^2 \right]$

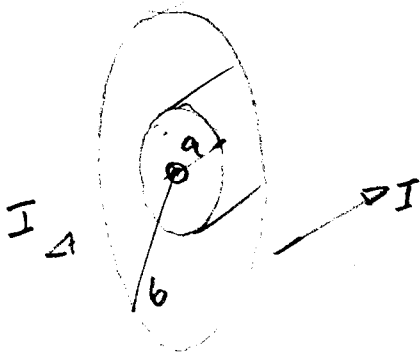
Analogamente ao caso elétrico $\left[u_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \right]$

No caso em que existe tanto $\vec{B}$ quanto $\vec{E}$ em uma dada região do espaço $\Rightarrow$ existe naquela região uma densidade de energia eletromagnética dada por

$$\text{por} \quad \boxed{u_{em} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2 \mu_0} B^2}$$

Isso propicia uma forma geral para obter a autoindutância de um circuito.

Exemplo: Cabo coaxial formado por uma casca cilíndrica de raio b e espessura desprezível e um condutor cilíndrico de raio a . A densidade de corrente que flui no condutor interno é uniforme e tem sentido oposto ao de que flui na casca externa. Vista de frente:



1. Campo $\vec{B} = 0$ para $r > b$
2. Campo $\vec{B}$ tem direção tangencial e módulo $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ $a < r < b$
3. Campo $\vec{B}$ tem direção tangencial e módulo $B = \mu_0 j \frac{r}{2}$ onde $j = \frac{I}{\pi a^2}$ para $r < a$ (esse resultado decorre da Lei de Ampère: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i$; para $r < a$ $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 i$; a corrente que atravessa a área delimitada pelo circuito Amperiano é $i = j \pi r^2$ onde $j = \frac{I}{\pi a^2}$.)

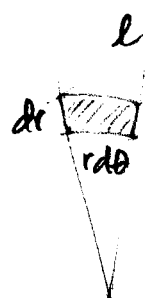
(*) Note que não existe campo magnético na região $r < b$.

A densidade de energia

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \begin{cases} \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 j}{2} \right)^2 & r < a \\ \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right)^2 & a < r < b \end{cases}$$

Para calcular a energia armazenada em todo o espaço devemos calcular $U = \int u_m dV$

$dV = r d\theta dr l$ onde l é o comprimento do cabo.



elemento de volume em coordenadas cilíndricas

$$U = \int_0^a u_m dV + \int_a^b u_m dV = \frac{1}{2\mu_0} \int_0^a \left(\frac{\mu_0 j}{2} \right)^2 r d\theta dr l + \frac{1}{2\mu_0} \int_a^b \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right)^2 r d\theta dr l$$

A integral em $d\theta$ pode ser feita trivialmente pois o integrando não depende de $\theta \Rightarrow$

$$U = \frac{1}{2\mu_0} 2\pi l \int_0^a \left(\frac{\mu_0 j}{2} \right)^2 r dr + \frac{1}{2\mu_0} 2\pi l \int_a^b \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right)^2 r dr$$

$$U = \frac{\pi l}{\mu_0} \frac{\mu_0 j^2}{4} \underbrace{\int_0^a r^3 dr}_{\frac{a^4}{4}} + \frac{\pi l}{\mu_0} \frac{\mu_0 \bar{I}^2}{4\pi^2} \underbrace{\int_a^b \frac{1}{r} dr}_{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$U = \frac{\pi l \mu_0 j^2 a^4}{16} + \frac{l}{4\pi} \mu_0 \bar{I}^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$j = \bar{I} / \pi a^2 \Rightarrow j^2 a^4 = \frac{\bar{I}^2 a^4}{\pi^2 a^4} \Rightarrow$$

$$U = \frac{\pi l \mu_0}{16} \frac{\bar{I}^2}{\pi^2} + \frac{l}{4\pi} \mu_0 \ln\left(\frac{b}{a}\right) \bar{I}^2$$

$$U = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\mu_0 l}{8\pi} + \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right\} \bar{I}^2$$

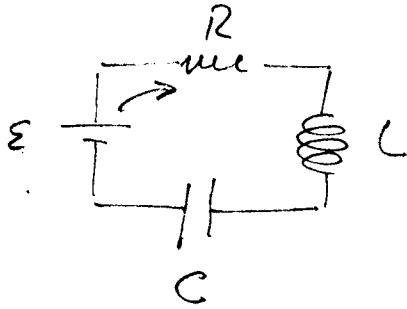
$L \equiv$ indutância do cabo coaxial

A indutância / unidade de comprimento

$$\left| L = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right|$$

contribuição parcial
do condutor interno

Circuito RLC com bateria.



Força eletromotriz no circuito

$$E - L \frac{di}{dt} = Ri + \frac{q}{C} \quad \text{ou}$$

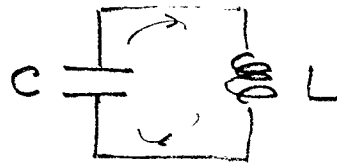
$$E - L \frac{di}{dt} - Ri - \frac{q}{C} = 0 \quad i = \frac{dq}{dt}$$

(a) Sem bateria ; $L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = 0 \quad i = \frac{dq}{dt}$
RLC

(b) Sem capacitor RL

$$E - L \frac{di}{dt} - Ri = 0 \quad i = \frac{dq}{dt}$$

(c) Sem resistência
e sem bateria
LC

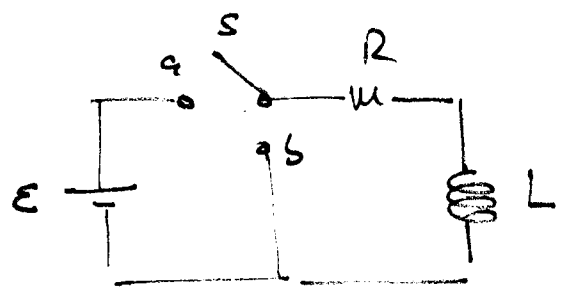


$$-L \frac{di}{dt} - \frac{q}{C} = 0 \quad i = \frac{dq}{dt}$$

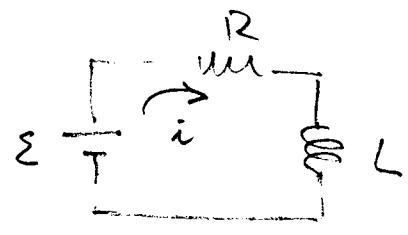
Circuitos envolvendo indutores.

$$\Delta V = V_p - V_f = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$$
$$V_p - V_f = \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

(b) Circuito RL



Chave S em (a) $\Rightarrow$



$$E - Ri - L \frac{di}{dt} = 0 \quad (1)$$

Condições de contorno em $t=0$ $i=0 \Rightarrow \left. L \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = E \Rightarrow \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = \frac{E}{L}$

Para $t \rightarrow \infty$ $\frac{di}{dt} \rightarrow 0$ (corrente estacionária)

$\Rightarrow i_{\text{max}} = i(t \rightarrow \infty) = E/R$



Chame $y(t) = \frac{di}{dt}$

Derivando a Eq. (1) em relação ao tempo obtenemos:

$$-R \frac{di}{dt} - L \frac{dy}{dt} = 0 \Leftrightarrow L \frac{dy}{dt} = -Ry \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{R}{L} dt$$

Vamos chamar $\tau_L = \frac{L}{R} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dt}{\tau_L}$. Integrando dos dois lados

Note que τ_L tem dimensão de tempo (tempo característico)

$$\ln\left(\frac{y}{y_0}\right) = -\frac{t}{\tau_L} \Rightarrow y = y_0 e^{-t/\tau_L} \text{ mas } y_0 = \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = \frac{E}{L}$$

$$\Rightarrow y = \frac{E}{L} e^{-t/\tau_L} \text{ ou seja } \left[\frac{di}{dt} = \frac{E}{L} e^{-t/\tau_L} \right]$$

$$y = \frac{di}{dt} \Rightarrow di = y dt \Rightarrow i(t) - \underbrace{i(0)}_{=0} = \int_0^t y(t') dt' \quad (23)$$

$$i(t) = \int_0^t \frac{\varepsilon}{L} e^{-t'/\tau_L} dt' = \frac{\varepsilon}{L} \left. \frac{e^{-t'/\tau_L}}{(-)\frac{1}{\tau_L}} \right|_0^t = -\frac{\varepsilon}{L} \tau_L e^{-t'/\tau_L} \Big|_0^t$$

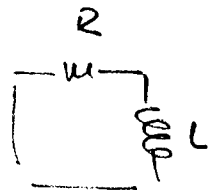
$$i(t) = -\frac{\varepsilon}{L} \frac{L}{R} e^{-t'/\tau_L} \Big|_0^t = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-t/\tau_L})$$

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-t/\tau_L})$$

Decorridos $t = \tau_L$ $i(t = \tau_L) = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-1}) \approx \frac{\varepsilon}{R} (1 - \frac{1}{3}) = \frac{2}{3} \frac{\varepsilon}{R}$

a corrente atinge $\frac{2}{3}$ do valor máximo.

Se a chave é ligada em (b) obtenemos



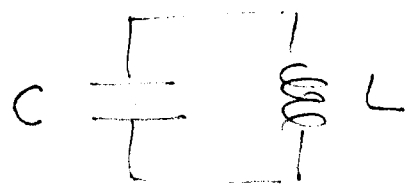
$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{di}{i} = - \frac{dt}{\tau_L} \Rightarrow \ln\left(\frac{i}{i_0}\right) = -\frac{t}{\tau_L}$$

agora $i_0 = i(t=0)$ instante em que a chave é conectada em (b). $\Rightarrow i = i_0 e^{-t/\tau_L}$

$i(\tau_L) = \frac{i_0}{e} \approx \frac{1}{3} i_0$ Decorridos um tempo $t = \tau_L$ depois que a chave foi conectada em b a corrente cai a $\frac{1}{3}$ do seu valor inicial.

(c) Circuito LC



$$L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \quad i = \frac{dq}{dt}$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0 \quad ; \text{ chamando } \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0 \quad q = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

As constantes A e φ são determinadas pelas condições iniciais Ex: em $t=0$ $q = q_0$ $i = 0$

$$i = \frac{dq}{dt} = -A\omega \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad \begin{matrix} i(0) = -A\omega \sin \varphi \Rightarrow \\ = 0 \end{matrix} \quad \varphi = 0$$

$$q = A \cos(\omega_0 t) \quad q(0) = q_0 \Rightarrow A = q_0$$

$$\text{Nesse caso } q(t) = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Carga, corrente, d.d.p em terminais do capacitor e a f.e.m. induzida t.b. oscilam com período $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ ou frequência $\nu = \frac{\omega_0}{2\pi}$

Sem resistência a energia total é constante:

$$\frac{1}{2} Li^2 + \frac{q^2}{2C} = \text{Energia total inicial} = \frac{q_0^2}{2C}$$